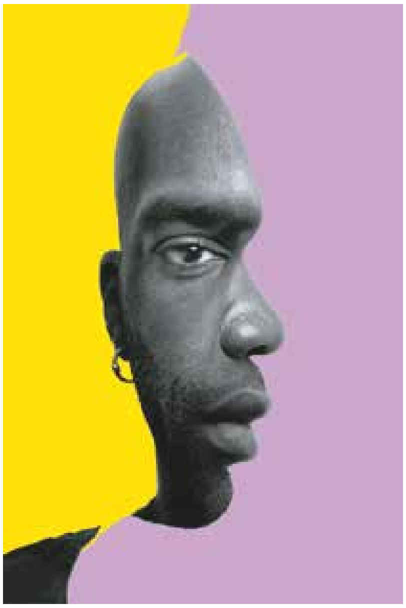
Crossfit cerebral

Matemática, ilusiones y humor

A partir de este número CIENCIA HOY incluye una nueva sección que tiene como objetivo principal entretener. ¿Cómo haremos eso? Mediante juegos, acertijos e ilusiones ópticas. De esa manera, mientras juguemos, ejercitaremos nuestro querido cerebro y también aprenderemos un poco de matemática, física, biología, historia y otro montón de cosas. Y por si todo esto no fuera suficiente, tenemos también una columna de humor. El origen de esta sección puede encontrarse en los libros de Yákov Perelman. Búsquenlos, ya que son clásicos. Esta sección está inspirada en ellos y es el resultado de una colaboración multidisciplinaria. Esperamos que todos disfruten ejercitándose y leyendo la sección tanto como nosotros disfrutamos haciéndola. No dejen de enviarnos sus comentarios, sugerencias y preguntas (*contacto@cienciahoy.org.ar*). ¡A jugar!

Nicolás Pírez

Imágenes biestables



El rostro ¿se encuentra de frente o de perfil? ¡Ambos! Pero cuando miramos la foto percibimos el rostro de frente o de perfil. Estas ilusiones se conocen como imágenes biestables: en una misma imagen conviven dos posibilidades. Sin embargo, nuestro cerebro, que no puede percibir la ambigüedad de la imagen, *elige* alguna de las dos opciones. Si prestamos atención a la oreja, percibimos el rostro de frente; pero si prestamos atención a la nariz, lo percibimos de perfil. Nuestra percepción del rostro es modulada en función de los elementos donde fijemos nuestra atención.

Para más ilusiones y juegos perceptuales puede visitarse la página web del Laboratorio de la Percepción: *https://bit.ly/33qz29K*.

Adivine el próximo

Observá los siguientes números, y decidí cuáles son los que siguen:

1, 11, 21, 1211, ...

Con la misma regla, ¿cuáles siguen acá:

2, 12, 1112, 3112, ...?

Un comentario: a muchos matemáticos no les gusta esta clase de problemas porque, argumentan, con un polinomio interpolador de grado suficientemente grande se puede justificar siempre cualquier valor que nos guste agregar. Pero acá estamos buscando una regla más general, que nos dé el siguiente número en ambas sucesiones y nos permita extender la idea para cualquier número inicial.

De hecho, estas secuencias tienen su historia: un importante matemático no fue capaz de descubrir la regla, y terminó escribiendo un trabajo muy completo sobre ellas, probando, entre otras cosas, lo siguiente:

a) Hay una constante c = 1,303... (irracional) tal que el cociente de dos términos consecutivos tiende a c cuando la sucesión crece.

b) La longitud (el número de dígitos) de los términos crece como c, c^2, c^3...

c) La constante c es la única raíz positiva de un polinomio de grado 71.

d) Existen 71 números, llamados elementos, tales que, tras finitos pasos, toda secuencia se escribe concatenando estos números.

e) Hay un solo elemento x estable (llamado hidrógeno, en un derroche de imaginación), tal que sucesión es $x, x, x, x, \ldots$

Las primeras no son fáciles de probar, pero… ¿te animás a encontrar x?

En familia

Nicolás con su hijo y Pedro con su padre se fueron a pescar. Nicolás pescó tantos como su hijo, y Pedro un tercio de los que pescó su padre.

Si entre todos trajeron 7 pescados, ¿cuántos pescó cada uno?

El sentido de la vida, el universo y todo lo demás

Divagaciones

Queridos lectores:

Debo confesarles que me sentí sorprendido al recibir la propuesta de escribir columnas de humor en una revista de divulgación científica, por lo que solo atiné a hacer lo que la poca lucidez de lo repentino me permitió: responder breve y conciso, usando la menor cantidad de palabras y letras posible.

En este caso, fue solo una palabra. Coincidirán en que fui ahorrativo, contribuyendo así a evitar el derroche alfabético que tanto daño le hace a nuestra ecología. Y fueron solo dos letras, que por tratarse de una *s* y una *i* tampoco alteraban el equilibrio entre vocales y consonantes, y además se trata de recursos renovables, ya que abundan en nuestro idioma. De modo que dije 'sí'.

Quizá cuestionarán ustedes (es casi un deber hacerlo, si son científicos) mi respuesta, y dirán: 'Pudiste haber dicho no'. Pues no, no pude. O no quise. O no supe.

En verdad, la respuesta es otra, como suele serlo en cada problema que la ciencia nos plantea. Este no es uno de ellos, pero no por ello no puede tener la misma explicación que los que sí lo son. Lo que ocurrió es que lo estuve midiendo, meditando y calculando largamente, y, si seguía por ese camino, mis intenciones ahorrativas iban a perderse, ya que mi psicoanalista, si le llegaba a consultar si debería o no colaborar con esta revista, iba a mirar al retrato de Freud con cara de pena, y me iba a aumentar los honorarios por preguntarle a él lo que yo mismo podía resolver.

Y esa vía del ahorro fue la que me llevó al sí. Porque sabía que con el sí terminaba la cosa. En cambio, si decía que no, ustedes ya lo pueden palpitar, se vendría automáticamente un '¿Y por qué no?', lo que llevaría a usar gran cantidad de letras y palabras, quizá algunas de ellas incunables, en el vano intento de explicar mi negativa sin tener motivo válido alguno.

En cambio el sí era fácil. O sea que la ciencia, mal mirada, es lo contrario del requerimiento sexual. O al menos, de lo que debería ser. Porque en sexo 'no, es no' y listo, mientras que 'sí' lleva a '¿Cuándo? ¿Dónde? ¿Cómo? ¿Con quién/es' y tantas otras preguntas que han engalanado las arcas de mi analista y de los de tanta otra gente.

Cuando ya obtuve mi sí y creía tener todo resuelto, me pregunté cómo iba a escribir en una revista de divulgación científica, sin tener yo el menor conocimiento de ningún tema acorde. Allí recordé las sabias palabras de un profesor, no recuerdo de qué materia, que me dijo: 'Si no puedes vencerlos, únete a ellos'. No sé si se refería a mis enemigos, a los mosquitos o a mis síntomas neuróticos, y tampoco sé a qué viene esa reflexión, pero fue lo que recordé.

Pensándolo bien, o mal, me di cuenta de que mi problema podía ser una ventaja. ¿No es acaso la ignorancia lo que lleva a un investigador a hacer su trabajo? ¿O acaso los científicos invierten años, fuerzas y afectos de su vida para averiguar lo que ya sabían?

Y, por otra parte, sentía que estaba cumpliendo con la confidencialidad necesaria en estos terrenos. Nada de lo que yo escriba implicará divulgar un secreto de Estado ni de mercado, puesto que no los conozco.

Luego de tanto prurito resuelto sin rascarme, me pregunté si los verdaderos científicos no se reirían al leer mis palabras.

Ojalá que sí… me respondí.

Rudy

#TeRegaloUnTeorema

Este apartado llamado #TeRegaloUnTeorema nos regalará un teorema en cada número. A veces serán piedras fundamentales del edificio matemático, a veces pequeños decorados o balcones para asomarse a mirar. A veces daremos demostraciones matemáticas rigurosas y otras, a falta de espacio y otro tipo de especias, los discutiremos sin llegar a una prueba. De todas maneras, siempre se aprende.

En esta primera entrega, habiendo pasado tan poco de las elecciones nacionales, se impone el...

Teorema del escrutinio

Si en una votación entre dos candidatos n votantes votan por A y m votantes votan por B (con $n > m$), la probabilidad de que A le vaya ganando a B a lo largo de todo el escrutinio es

$$p = \frac{n - m}{n + m}$$

Antes de la demostración, primero un ejemplo: si hay 5 votantes, 3 votan por A y 2 votan por B, los posibles escrutinios (el orden en que aparecen las boletas cuando se abre la urna) son los siguientes:

AAABB AABAB ABAAB AABBA ABABA
ABBAA BAAAB BAABA BABAA BBAAA

Todos tienen la misma chance y solo en los dos primeros A va ganando todo el tiempo. Entonces la probabilidad es **2 / 10 = 1 / 5 = (3 - 2) / (3 + 2).**

Fíjense que el enunciado del teorema tiene como datos la cantidad de votos que obtuvieron A y B, aunque eso no es información disponible antes de hacer el escrutinio. Está disponible al final del escrutinio, pero en ese momento la probabilidad en cuestión ya cambió, ¿no? A pesar de eso, todo esto tiene total sentido (¿lo tiene?).

El teorema también supone que las boletas se vayan sacando al azar e independientemente de la urna. No lo pusimos antes para no arruinar el enunciado, pero es una hipótesis fundamental (y ya vimos en elecciones pasadas que no siempre es válida).

Demostración del teorema del escrutinio

Llamamos un escrutinio a un posible orden en que van apareciendo las boletas, o sea, cada una de las tiras tipo AABBA del ejemplo. En la lista de arriba están los diez posibles escrutinios cuando hay 3 votos para A y 2 votos para B.

Identificamos cada escrutinio con una trayectoria como la de la figura 1, que empieza en 0, va uno para arriba si viene un voto para A y uno para abajo si es para B. Entonces nuestro problema consiste en calcular la probabilidad de que la trayectoria no toque el eje x (salvo al comenzar, claro).

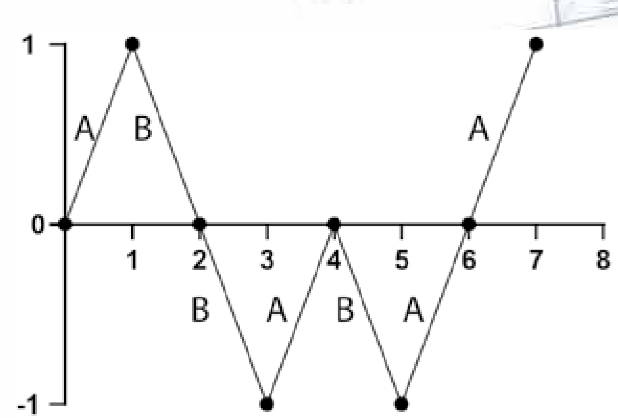


Figura 1. Un posible escrutinio con 4 votos para A y 3 para B. El orden en que salieron las boletas es ABBABAA y en este caso no ocurrió que A haya ido ganando a lo largo de todo el escrutinio. Aunque, desde ya, fue el ganador al final del recuento. Los momentos en que la trayectoria toca el eje x (el de abscisas) son aquellos en que el recuento está empatado.

Vamos a concentrarnos en las trayectorias en que *no* pasa eso, es decir, que vuelven al eje x (como en la figura 1, en que el recuento está empatado tres veces, además de al inicio). Si el primer voto es para A y la trayectoria toca el eje x en algún momento posterior, podemos identificarla con una trayectoria 'reflejada'. Reflejamos solo la parte de la trayectoria que está entre el momento de comenzar el escrutinio y el primer momento (sin contar el inicio) en que A y B están empatados (cuando la trayectoria vuelve a tocar el eje x). El resto la dejamos tal cual, como en la figura 2.

Estas trayectorias (las originales y las reflejadas) están en correspondencia uno a uno y por lo tanto tenemos la misma cantidad. Repito: tenemos la misma cantidad de trayectorias que empiezan hacia arriba y vuelven al eje x, que las que empiezan hacia abajo y vuelven al eje x.

Como todas las trayectorias son igualmente probables (¿lo son?), obtenemos que la probabilidad buscada es la siguiente:

***p* = 1** – probabilidad de empate en algún momento del recuento
p = **1** – probabilidad de que la trayectoria vuelva al eje x
***p* = 1** – probabilidad de que la trayectoria vuelva al eje x y empiece ganando A o B

Acá viene la magia (seguimos la cuenta de arriba):

***p* = 1 - 2 *** (probabilidad de que la trayectoria vuelva al eje x y empiece ganando B)

***p* = 1 -2 *** (probabilidad de que empiece ganando B)

***p* = 1 - 2 *** (probabilidad de que el primer voto sea para B) =

$$p = 1 - 2 \cdot \frac{m}{n + m}$$

$$p = \frac{n - m}{n + m}$$

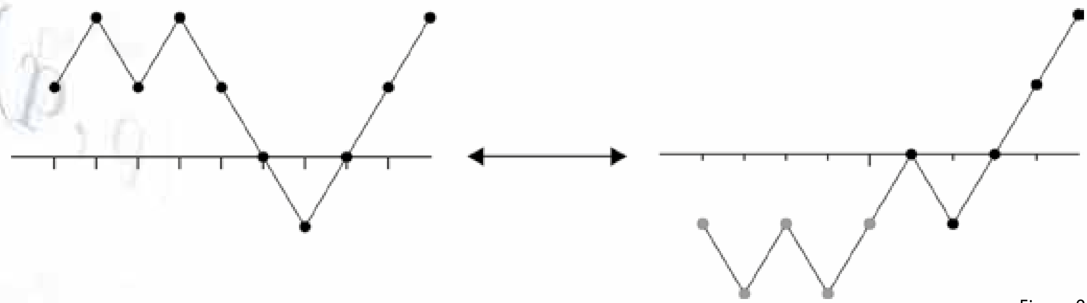


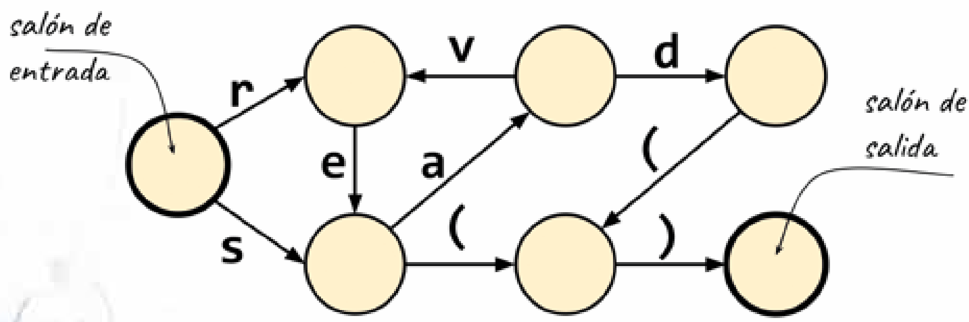
Figura 2

Por último, algunas cuestiones para reflexionar:

1) ¿Por qué es importante reflejar solo la primera parte de la trayectoria?
2) Al truco que usamos se lo llama *principio de reflexión* y es superútil para calcular probabilidades en paseos al azar, colas de atención, finanzas y fenómenos microscópicos. O sea, tiene muchas aplicaciones.

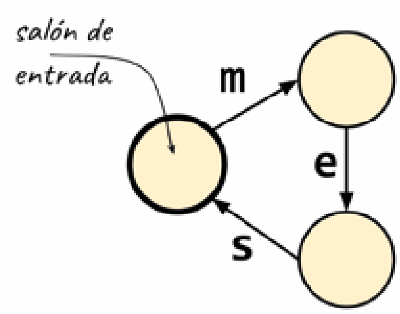
#TeRegaloUnTeorema está también en Twitter *@pgroisma*. Podés encontrar este y muchos más siguiendo el hashtag o con este código QR:

Autómatas



Estás en el salón de entrada, y tenés una palabra en la mano. A medida que vas leyendo una letra, vas pasando al salón indicado por la flecha. ¿Puedo llegar al salón de salida leyendo las siguientes palabras?

read()
read
save()
red()
saveave()



Por ejemplo, en el siguiente gráfico, con la palabra 'mes' vuelvo al salón de entrada, pero con la palabra 'mermelada' no puedo llegar a ningún lado.

Corolario:

Los programas de computadora se suelen escribir como un texto muy riguroso y esquemático, que debe respetar las reglas de un lenguaje. ¿Cómo sabemos si un texto escrito respeta las reglas del lenguaje? Utilizando un 'mapa de salones' similar a este, que se conoce como *autómata*.

Soluciones

Adivine el próximo

John Horton Conway publicó en *Eureka 46* (1986: 5-16) el trabajo 'The weird and wonderful chemistry of audioactive decay', probando los puntos que mencionábamos. Ya parte del título, 'decaimiento audioactivo', nos sugiere cómo se forman: partiendo de un número inicial, digamos el 1, los siguientes se leen así:

11 (un uno), 21 (dos unos), 1211 (un dos, dos unos), 111221 (un uno, un dos, dos unos), etcétera.

El único elemento estable es x = 22.

Respecto del punto (d), que tras finitos pasos todo número de la secuencia se escribe concatenando algunos de los 71 bloques elementales, existieron dos demostraciones, pero se perdieron. El resultado se conoce como el teorema cosmológico perdido (*the lost cosmological theorem*).

En familia

Pedro solo pudo pescar 1, y su padre 3, con otra opción (2 y 6, 3 y 9) nos pasamos de 7, que es lo que pescaron en total. Ahora, Nicolás y su hijo pescaron 1 + 1, 2 + 2 o 3 + 3, siempre un número par, que sumado al 1 + 3 nunca puede darnos 7. Así que la única solución posible es que Pedro sea el nieto de Nicolás, y pescaron 3, 3 y 1.

El sentido de la vida, el universo y todo lo demás

Las frutas que vemos, desde luego, no tienen importancia alguna en este problema. Representan incógnitas. Por ejemplo, si llamamos x a la naranja y X a la banana, la primera ecuación dice que $x^2 = X$. Así, la cuarta ecuación, que es la que nos interesa resolver, se puede leer como $x^2 + y^2 + z^2 = 42$.

Lo que buscamos entonces es escribir al 42 como suma de cuadrados, un tipo de problemas que viene siendo estudiado desde la antigua Grecia. El hecho de que todo cuadrado sea positivo implica que las posibles soluciones estén acotadas: si alguno de los valores de x, y o z es demasiado grande, entonces $x^2 + y^2 + z^2$ será mayor que 42. Por eso es que se puede encontrar una solución por simple inspección, si es que la hay; además, el conjunto de soluciones, de ser no vacío, será finito. Por ejemplo, $x = 1$, $y = 4$, $z = 5$ es la solución.

Más allá de la inspección, el teorema de los tres cuadrados de Legendre asegura la existencia de una solución (*https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre%27s_three-square_theorem*). Muy distinta es la situación con la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 = 42$, que fue resuelta este año (*https://www.lanacion.com.ar/sociedad/enigma-de-la-suma-de-tres-cubos-matematicos-encuentran-la-solucion-final-despue-nid2287107*).

Autómatas

Las únicas respuestas posibles son:

read(), save(), saveave().

Equipo de la sección 'Matemática, ilusiones y humor'

Nicolás Fernández Larrosa
Biólogo, IFIBYNE, UBA-Conicet
fernandezlarrosanicolas@gmail.com

Juan Pablo Pinasco
Matemático, UBA-Conicet
jpinasco@gmail.com

Rudy
Humorista
marcelorudy10@gmail.com

Nicolás Sirolli
Matemático, UBA-Conicet
nsirolli@dm.uba.ar

Pablo Groisman
Matemático, UBA-Conicet
pgroisma@dm.uba.ar

Nicolás Pírez
Neurobiólogo, IFIBYNE, UBA-Conicet
npirez@gmail.com

Alfredo Sanzo
Ingeniero, ICC, UBA-Conicet
alfredo.sanzo@gmail.com