Crossfit cerebral

Matemática, ilusiones y humor

La revolución científica

Ahora que terminó el mandato presidencial, podemos revelar la verdad: los cuatro años de macrismo fueron un verdadero experimento científico (de mercado). Más que el reino de la oferta y la demanda, fue el del ensayo y error. Se aplicó, además, una curiosa y revolucionaria concepción experimental: el error, en sí, era más valioso que el ensayo.

Estimamos que esta concepción estaba basada en una extraña teoría, cuyo origen científico desconocemos, pero que ha sido exitosa en más de un país, que se enuncia como 'Cuanto más nos equivocamos, más nos votan'.

No tenemos claro si esa teoría deriva de alguna experiencia real o es imaginario puro (diría un lacaniano). Tampoco si fue realmente probada en seres humanos, o si los sujetos sometidos a la prueba fueron de otra especie. Esto pondría en jaque ciertas tesis sociológicas tradicionales, según las cuales las demás especies no votan.

Claro está que, como siempre, hay divergencias conceptuales, pues algunos socioantropozoólogos opinan que los animales sí votan. Ellos dicen que existe:

- el voto avestruz, que esconde la cabeza como diciendo 'yo no lo voté, háganse cargo ustedes';
- el voto loro, que repite lo que escucha, lee o ve en los medios, tantas veces que se lo apropia y cree que es lo que él o ella misma pensó;
- el voto escorpión, que va contra sus propios intereses, pero el veneno es más fuerte, está en sus genes hacerle daño a los demás, aunque el o ella misma perezca en el intento;
- el voto yegua, bisonte, peludo, tortuga, gato, pingüino…,
- y, por supuesto, el voto gorila, que contradice lo expuesto hace unos párrafos (eso de "cuanto más nos equivocamos…") proponiendo: "No, no se equivocan, ese es el único camino posible", al tiempo que tratan de poner a las demás especies en algún laberinto del que no puedan salir en cien años, y proponen volver a tiempos pavlovianos en los que solo se puede comer cuando suene el timbre.

Pero más allá de disquisiciones de fauna, hemos sido, sin duda, sujetos –me cabe decir objetos– de prueba de esta verdadera revolución: trataron de ver hasta dónde nos bancábamos sus cambios de paradigma, y deben estar frustrados, porque parece que fue mucho menos de los que ellos querían.

Por ejemplo, cambiaron el lenguaje. Así 'mentira' pasó a llamarse 'posverdad', 'asalariado' fue 'costo social', 'jubilado' cambió a 'excedente', 'tarifazo' a 'sinceramiento', 'gobierno' a 'mercado', 'ley' a 'tendencia', 'juicio' a 'prejuicio', 'seguridad' a 'persecución', y tantas otras palabras. Algunas, como 'atractividades' o 'desenvolvidos', parecerían en principio ser simplemente errores, pero dado que las mencionó el infalible primer autoritario electo, ya se encargará la Academia de darles curso.

También las matemáticas tuvieron lo suyo. Mostraron que 'cero' es igual a 'veinte millones'. ¿Imposible? Nooo, lo hicieron: prometieron 'pobreza cero' y se fueron con 20 millones de pobres. Si estudiamos la ecuación y aceptamos la hipótesis de que 'la pobreza tiene que ver con el conjunto de pobres', entonces

Pobreza cero = 20 millones de pobres

Simplificamos tachando 'pobreza' y 'de pobres' (que es lo que ellos hicieron estos cuatro años: tachar la pobreza, u ocultarla), y da:

0 = 20.000.000

La antropología y la sociología, sin duda, han sido afectadas, a partir de una extraña definición de los grupos humanos. Por ejemplo, cuando decía: 'Todos tendrán que hacer un esfuerzo' y cuando decía 'Todos vamos a estar mejor', 'todos' no se refería a las mismas personas.

La ciencia en general podrá contar con nuevos paradigmas. Por ejemplo, a partir de esta revolución, cualquier biólogo, médico, meteorólogo, sismólogo o quien fuera, ante el evidente fracaso de sus pronósticos, y ante las trágicas consecuencias que puedan devenir, tiene la herramienta infalible para salir airoso: 'Pasaron cosas'. Pareciera que el 40% de los seres humanos toma esa respuesta como válida.

Nos detenemos aquí, esperando que ellos, también, se hayan detenido aquí.

Rudy

Sopa de eles

¿Se puede cubrir –enteramente y sin superposiciones– un tablero de ajedrez con eles de dos casilleros de alto por dos de ancho?

¿Y si además de las eles se admiten íes, es decir rectángulos de 6 x 1 casilleros, colocados tanto en forma vertical como horizontal?

Corré esas torres

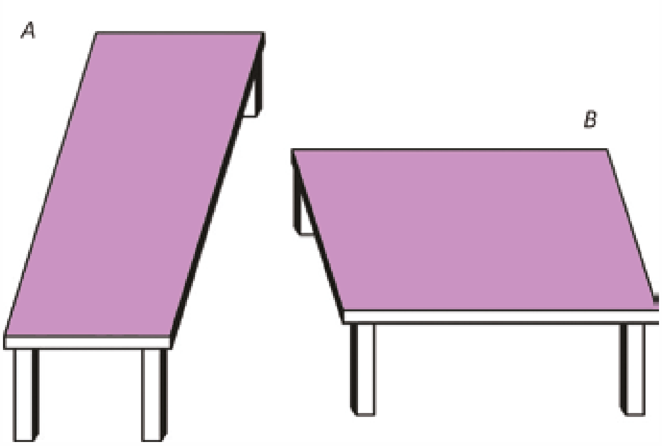
Las 64 casillas de un tablero de ajedrez, dispuestas en 8 filas y 8 columnas iguales, se numeran consecutivamente de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, comenzando por la superior izquierda, a la que se le pone 0, y terminando por la inferior derecha, con el número 63 (0 a 7 en la primera fila, 8 a 15 en la segunda, etcétera).

a) ¿Se puede colocar en el tablero 8 torres que no se ataquen entre sí?

b) Si se pudiera, y se sumara los números de las casillas donde se ubicaron, ¿a cuánto ascendería esa suma?

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Vemos en 2D, percibimos en 3D: ¿cuál de las mesas es más larga?



Aunque te parezca increíble, tanto el ancho como el largo de las tablas violetas de ambas mesas son exactamente iguales. Te proponemos que lo corrobores con una regla. ¿Por qué, entonces, se percibe la de la izquierda como más larga y la de la derecha como más ancha? Se trata de una ilusión óptica llamada *mesas de Shepard*, publicada por el psicólogo Roger Shepard de la Universidad de Stanford en 1990.

Ella pone en evidencia cómo es nuestro procesamiento visual de profundidad. Nosotros vemos en dos dimensiones, porque nuestra retina actúa como una pantalla en 2D, pero nuestra corteza visual (en el cerebro) interpreta la imagen y la percibimos en tres dimensiones. Para eso, integra en una única imagen la información que le llega de cada ojo, es decir, convierte información monocular en binocular. El dibujo utilizado (técnicamente, *perspectiva axonométrica*) pone en evidencia este fenómeno y nos confunde sobre las medidas de las mesas. En este caso, nuestra percepción está culturalmente condicionada, pero esa es otra historia.

#TeRegaloUnTeorema

Teorema del cumpleaños: para entender las casualidades

Va en forma de pregunta:

¿Cuántas personas tiene que haber en un grupo para que la probabilidad de que haya al menos dos que cumplen el mismo día sea mayor a 50%?

Teorema: 23 personas son suficientes.

Si queremos que esa probabilidad sea 97%, necesitamos por lo menos 50 personas; para que sea 99,9%, 70. Más claro: en un grupo de 70 personas, hay un 99,9% de probabilidades de que por lo menos dos cumplan años el mismo día. Al lector incrédulo se le sugiere juntar 70 personas y ver si encuentra dos que satisfagan lo anterior.

La demostración del teorema supone que la cantidad de nacimientos por día no cambia a lo largo del año, cosa que es falsa, pero después probaremos que tal hipótesis es innecesaria. También supone que no hay nacimientos el 29 de febrero, algo igualmente falso pero prescindible.

Demostración

Vamos a calcular la probabilidad de que eso no pase. Es decir, que en un grupo de 23 personas, todas cumplan en días distintos. Podemos numerar a las personas del 1 al 23 y al evento en que estamos interesados, repensarlo como que la persona 2 no cumpla el mismo día que la persona 1, que la 3 no cumpla el mismo día que la 2 ni que la 1, etcétera, y que la persona 23 no cumpla el mismo día que ninguna de las personas de la 1 a la 22.

La primera probabilidad es 364 / 365, la segunda (condicional a la ocurrencia del evento anterior) es 363 / 365, luego 362 / 365, y así sucesivamente hasta llegar a 343 / 365. Todas son probabilidades condicionales a todo lo que ocurrió antes. Entonces la probabilidad que buscamos –que dos no cumplan el mismo día– es:

$$(364 / 365) \times (364 / 365) \times \ldots \times (364 / 365) = 0{,}492703$$

Entonces la probabilidad de que haya dos que cumplen el mismo día es 1 - 0,492703 = 0,507298. ¡Y listo! ¡Al que llegó hasta acá, feliz cumple! Aplauso, medalla y beso. Y bolsita con caramelos.

Lo que sigue es para osados. Parece razonable pensar que en ciertos días se concentran más nacimientos que en otros, es decir, que no todos los días sean equiprobables para nacer. En tal caso, la probabilidad de que haya por lo menos dos personas que cumplan el mismo día aumenta.

(¿Por qué?)

Eso se puede demostrar usando la siguiente desigualdad, que invitamos al lector a demostrar.

Para cualesquiera números reales a y b:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq a.b$$

Usando esto, vamos a probar.

Otro teorema del cumpleaños

Si p_1 es la probabilidad de haber nacido el 1 de enero, p_2 la del 2 de enero, y así sucesivamente, entonces la probabilidad de que en un grupo de 23 personas haya por lo menos dos que cumplen años el mismo día se minimiza cuando $\mathbf{p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_{365}}$.

Primero observemos que encontrar dos cumpleaños el mismo día es equivalente a colocar bolitas en urnas. Una urna por cada día del año y una bolita por cada persona del grupo. Tenemos 365 urnas y 23 bolitas. Colocamos cada una de las bolitas en una urna elegida al azar. Si dos bolitas caen en la misma urna, significa que hay dos personas que cumplen el mismo día. Queremos calcular entonces la probabilidad de que haya (al menos) dos bolitas en una misma urna.

Si los cumpleaños se distribuyeran uniformemente a lo largo del año, cada bolita tendría probabilidad $p_i = 1 / 365$ de ir a parar a cada una de las urnas. Si por el contrario hubiese días con más cumpleaños que otros, eso se traduce en que habrá urnas con más probabilidad que otras de recibir bolitas. Es decir, cada vez que elegimos una urna al azar para colocar una bolita, les asignamos probabilidades iguales a la probabilidad de nacer en el día respectivo.

Llamemos entonces, para una bolita fija, p_1 a la probabilidad de que la bolita caiga en la urna 1 (la del 1 de enero); p_2 a la probabilidad de que lo haga en la urna 2, y así sucesivamente. Antes supusimos que todos los p_i eran iguales (y por ende valían 1 / 365); ahora veremos qué sucede si son distintos.

Concentrémonos como antes en la probabilidad de que no haya dos cumpleaños iguales. Vamos a ver cómo cambia esa probabilidad cuando pasamos de tener todos los p_i iguales a tener algunos distintos.

Si hubiese 23 personas en el grupo, podríamos calcular (escribir, en realidad, porque no vamos a calcular nada) la probabilidad de que todas las bolitas caigan en distintas urnas como una suma de muchas probabilidades de la forma

$$\mathbf{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{23}}$$

La que está arriba es la probabilidad de que las 23 personas cumplan todas en días distintos y que además esos días sean justo 1 de enero, 2 de enero, 3 de enero, etcétera.

La probabilidad que estamos buscando es mucho más grande, porque es una cuenta similar pero pudiendo elegir los días en que cumple cada una de las personas, aunque al final se trata de sumar muchas cosas como esa, donde aparecen las p_i correspondientes a los días en que queremos que cumplan.

Ahora la cuestión es si toda esa suma es mayor cuando todos los p_i son iguales o cuando puede haber alguno distinto (o varios, o todos).

Entonces supongamos que tenemos una elección de los p_i en la que no son todos iguales. Por ejemplo p_1 es distinto de p_3. Yo digo que entonces podemos construir una nueva elección de los p_i en la que nuestra probabilidad nos da más grande. La forma de conseguirla es cambiar a p_1 y a p_3 por su promedio $(p_1+p_3) / 2$. Si hacemos eso y volvemos a hacer nuestra cuenta para calcular nuestra querida probabilidad, vamos a ver que muchos términos no cambian.

Todos los términos en los que no aparecen ni p_1 ni p_3 no cambian. Después están los términos en los que aparece p_1 o p_3, pero solo uno de los dos. Estos aparecen en parejas, uno con p_1 y uno con p_3 y el resto de los factores iguales. Por ejemplo está $p_1 \cdot p_2 \cdot p_4 \cdot p_5 \ldots p_{24}$ y $p_3 \cdot p_2 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_{24}$. Así que a cada una de estas parejitas le podemos sacar factor común y nos quedan cosas como

$$\mathbf{(p_1+p_3) \cdot p_2 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdots p_{24}}$$

En todas estas parejitas si cambiamos p_1 por $(p_1 + p_3) / 2$ y a p_3 por $(p_1 + p_3) / 2$, nos queda lo mismo (¿lo ven?)

Hasta ahora no cambió nada, entonces. Pero nos falta mirar los términos que tienen a p_1 y p_3. En todos esos, usando la desigualdad de arriba con $a = p_1$ y $b = p_3$ obtenemos que al cambiar a p_1 y p_3 por su promedio, la cuenta da más grande.

¡Charaaaannnn!

Entonces la cuenta total da más grande. Fijate que siempre va a dar más grande salvo que todos los p_i sean iguales, en cuyo caso, al hacer esto, da igual.

Si llegaste hasta acá, te merecés un cacho de torta. ¡Podés reclamarla!

Y para los recontraosados (nivel Rambo): hay algo que no está del todo bien en la demo, pero quien encuentre el problema sabrá también cómo arreglarlo. Esto último te lo digo para que si pensás que hay algo que no cierra, no creas que el problema sos vos.

Soluciones

Sopa de eles

No se puede. Tengamos en cuenta que cada *l* ocupa dos casilleros blancos y uno negro, o bien dos negros y uno blanco; cada *i* ocupa tres blancos y tres negros alineados.

Supongamos que sí se pudiese. Si llamamos L1 a la cantidad de eles del primer tipo, L2 a la cantidad de eles del segundo tipo, e I a la cantidad de íes utilizadas (que sería igual a 0 si no nos permitimos usar estas piezas), tendremos entonces que la cantidad de casilleros blancos ocupados está dada por:

$$B = 2L1 + L2 + 3I$$

mientras que la cantidad de casilleros negros ocupados está dada por

$$N = L1 + 2L2 + 3I$$

Sumando obtenemos

$$B + N = 3\,(L1 + L2 + 2I)$$

Pero esto es absurdo, pues B + N es igual a 64, la cantidad total de casilleros del tablero de ajedrez, que no es múltiplo de 3.

Corré esas torres

a) Si podemos colocar ocho torres que no se ataquen, solo habría una por fila y una por columna. Esto nos da una idea de cómo hacerlo: pongamos todas en las casillas numeradas del 0 al 7, y simplemente desplacemos hacia abajo 7 de estas torres, dejando 1 en las numeradas del 8 al 15, otra en las numeradas del 16 al 23, etcétera. Como originalmente estaban todas en distintas columnas, y ahora también están en distintas filas, no hay dos que se ataquen. De paso, contando de cuántas formas podemos desplazarlas, podríamos contar el número de formas en que pueden ubicarse y que no se ataquen entre sí.

Ah, también podíamos ponerlas sobre la diagonal: claramente en ese caso no se atacan, pero lo de arriba nos ayuda con lo que sigue.

b) Si colocáramos las torres en la diagonal, la suma de los números de sus casillas sería:

$$0 + 9 + 18 + 27 + \ldots + 63$$

Como el problema da a entender que no importa cómo las ubiquemos, la suma va a ser siempre la misma, la respuesta debe ser 9 x (1 + 2 + … + 7) = 9 x 28 = 252.

Bien, es un poco tramposa esa respuesta… ¿siempre suman lo mismo? Si las tenemos ubicadas de otra manera, pero no se atacan entre sí, habrá 1 en cada columna y 1 en cada fila. Consideremos sucesivamente las filas (a cuyos números llamamos k) y escribamos los números de sus ocho casillas:

- Para la fila 1, son de la forma 0 + k, con k de 0 a 7.
- Para la fila 2, son de la forma 8 + k, con k de 0 a 7.
- Para la fila 3 son de la forma 2 x 8 + k, con k de 0 a 7.
- Para la fila 4 son de la forma 3 x 8 + k, con k de 0 a 7.
- Para la fila 5 son de la forma 4 x 8 + k, con k de 0 a 7.
- Para la fila 7 son de la forma 5 x 8 + k, con k de 0 a 7.
- Para la fila 7 son de la forma 6 x 8 + k, con k de 0 a 7.
- Para la fila 8 son de la forma 7 x 8 + k, con k de 0 a 7.

La solución ahora resulta clara: como las torres están en distintas filas, tenemos que sumar los números:

$$(0 \times 8) + (1 \times 8) + \ldots + (7 \times 8)$$

y como están en distintas columnas, tenemos que sumar también

$$0 + 1 + \ldots + 7$$

Nos olvidamos de los ceros; agrupamos el resto sacando factor común y advertimos que 1 está 9 veces, lo mismo los demás hasta el 7. Queda entonces como suma:

$$(1 \times 9) + (2 \times 9) + \ldots + (7 \times 9) = 252$$

Una digresión. Muchas veces se oye decir que en matemáticas se simplifica el problema a resolver para entenderlo, y que luego se lo generaliza. Está implícito que se reduce el problema a uno más fácil, pero sucede que a veces es más fácil encarar un problema más grande. Para el caso del ajedrez, podríamos analizar primero un tablero de 2 x 2 casilleros, luego pasar a uno de 3 x 3, y así sucesivamente. Sin embargo, lo más conveniente sería encarar directamente un tablero de 10 x 10.

¿Por qué? Porque ese tamaño coincide con la base de nuestra numeración. En tal tablero, cada columna terminaría en un dígito entre el 0 y el 9, y cada fila (decena) comenzaría con un digito entre el 0 y el 10. Por lo tanto, si colocáramos una torre en cada fila, y en cada columna, deberíamos sumar las unidades del 1 al 9, y las decenas del 10 al 90, operaciones más simples que las descriptas para el tablero de 8 x 8.

Si usáramos numeraciones con otras bases –12, 16 o la que fuese–, nos convendría utilizar tableros de esos tamaños.

Equipo de la sección ‘Matemática, ilusiones y humor’

Nicolás Fernández Larrosa
Biólogo, IFIBYNE, UBA-Conicet
fernandezlarrosanicolas@gmail.com

Juan Pablo Pinasco
Matemático, UBA-Conicet
jpinasco@gmail.com

Rudy
Humorista
marcelorudy10@gmail.com

Nicolás Sirolli
Matemático, UBA-Conicet
nsirolli@dm.uba.ar

Pablo Groisman
Matemático, UBA-Conicet
pgroisma@dm.uba.ar

Nicolás Pírez (coordinador)
Neurobiólogo, IFIBYNE, UBA-Conicet
npirez@gmail.com

Alfredo Sanzo
Ingeniero, ICC, UBA-Conicet
alfredo.sanzo@gmail.com

Preguntas, comentarios y sugerencias:
contacto@cienciahoy.org.ar