Crossfit cerebral N.° 8

Matemática, ilusiones y humor

Sumar bien

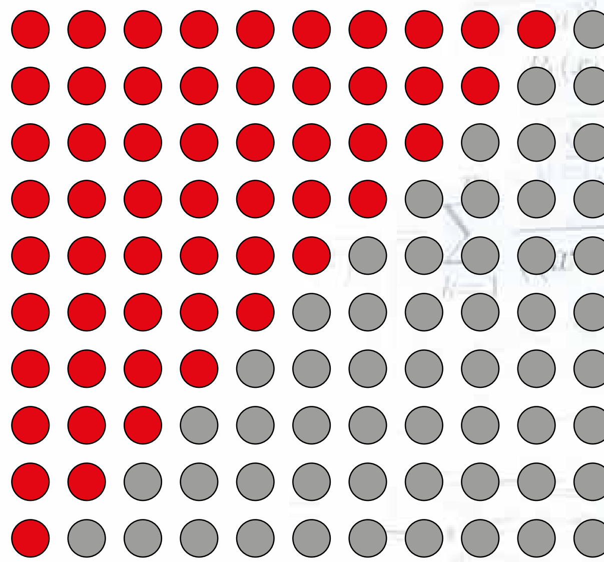
Carl Friedrich Gauss, llamado el *príncipe de los matemáticos*, además de un genio era dueño de un genio difícil de manejar. Desde niño ya era muy inquieto, y cuenta la leyenda que en una clase su docente, para mantenerlo entretenido mientras educaba a los plebeyos, le pidió que sumara todos los números del 1 al 100.

Esperaba así tenerlo ocupado un buen rato, pero el príncipe no tardó nada en darle el resultado: 5050.

Los matemáticos no se destacan necesariamente por hacer rápido las cuentas, sino por hacerlas bien. Con certeza Gauss no llegó al resultado pensando que '1 más 2 es 3, más 3 es 6, más 4 es 10'. ¿Cómo llegó? No tenemos esa certeza, pero bien pudo haber sido pensando en la figura que se ve a la derecha.

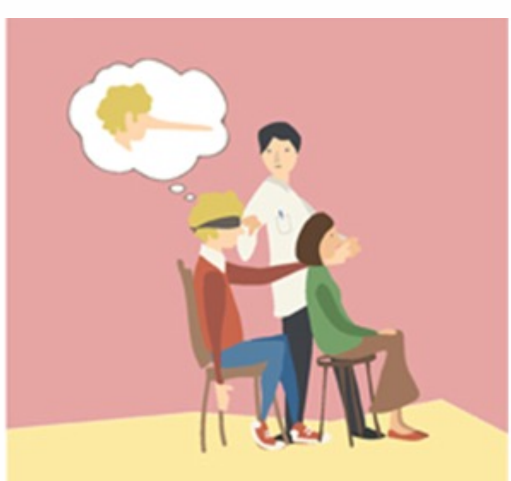
Si queremos contar las monedas rojas, en lugar de calcular 1 + 2 + 3 +... + n (en el dibujo n = 10, pero el razonamiento es independiente de esto), podemos contar las rojas más las grises, y luego dividir por dos. Y esto último es más fácil, pues el cuadrado tiene n monedas de alto y n + 1 de ancho, con lo cual la cantidad total es igual a ½ * n * (n+1).

Juguemos a ser príncipes. ¿Cuál es el resultado de $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2$?



La ilusión de Pinocho: ¿adónde empieza y termina nuestro cuerpo?

En números anteriores hemos compartido ilusiones que permiten experimentar la percepción visual. Hoy nos preguntaremos: ¿cómo percibimos nuestro cuerpo? Para ello, les proponemos hacer la *ilusión de Pinocho*. En esta ilusión, quien la experimenta debe estar con los ojos cerrados y ubicado atrás de una segunda persona. Una tercera persona llevará la mano del primero o primera hacia adelante para tocar la nariz de la segunda persona, mientras le toca su propia nariz de manera sincrónica (*importante*: para que la ilusión funcione bien, los contactos dedo-nariz deben ser simultáneos y sincrónicos).



¿Por qué sentimos que tenemos una nariz larga? Este es un ejemplo de una ilusión sinestésica: o sea, que la información de una modalidad sensorial influye en la percepción de otra modalidad. En este caso confluye información de la modalidad somatosensorial (tacto; en nuestro ejemplo, desde el dedo y la nariz de la primera persona) y propioceptiva (información postural interna, en este caso: de si los músculos están estirados o contraídos). Esta información llega a la corteza somatosensorial, en el cerebro, y se integra para darle sentido al hecho de que sentimos que nos tocamos la nariz con un brazo que se encuentra estirado… por ende, debemos tener una nariz alargada como Pinocho.

¿Qué pasa si repetimos el experimento sin los ojos tapados? Verán entonces que la información visual también contribuye a entender los límites de nuestros cuerpos.

Fronteras

Debo admitir, queridos colegas, que soy extranjero. No solamente en el mundo científico, dado que los humoristas descubrimos lo que ya estaba descubierto, y respecto del sistema 'ensayo y error' estamos más cerca del error que del ensayo.

También soy un extranjero lingüístico, en el punto de que no es que no crea en los neologismos, pero tenía entendido que solamente eran válidos cuando de alguna manera le agregaban un sentido nuevo, digamos, enriquecían, a la lengua. Cierto es que estamos en tiempos donde las riquezas son difíciles de incrementar, pero el uso de algunas palabras como 'influenciar' (en vez de 'influir'), 'recepcionar' (en vez de 'recibir'), 'deletear' (en vez de 'borrar'), 'accesar' (en vez de 'acceder'), 'guglear' (en vez de 'investigar'), 'contagiación' –perlita regalada por una ministra de Educación– (en vez de 'contagio') y otras donde equis, arrobas o signos diversos reemplazan a las otrora reconocibles letras, sin agregarles matiz alguno (o quizá sí, el de volverlas más confusas y quitarles un poquito de la historia), me hacen pensar en que el lenguaje se parece un poquito al capitalismo financiero: si emitimos más palabras para los mismos sentidos, cada palabra vale menos.

Pero quizá se acerque a cierta equidad en la cual cada persona, persono y persone tenga el derecho de crear su propio diccionario; el lenguaje perderá tal vez la posibilidad de comunicarnos, pero también la comunicación es un bien, que no por escaso cotiza en estos tiempos. Se trata de ser visibles, si nadie te escucha, o escuchan cualquier cosa, no importa, en tanto y en cuanto te den un *like*.

Y aquí viene otra: el 'te quiero' o 'te amo' presencial, del siglo XX, fue remplazado por el *like*, virtual, anónimo pero sumamente autosatisfactorio.

Antes lograbas que una persona te ame, y eras feliz si también amabas a una persona, y si era la misma persona, mejor aún. Ahora se trata de conseguir muchísimos *likes*. Los que seguimos creyendo en el amor, cada vez más extranjeros

Luego tenemos la medicina, las ciencias que investigaban, microscopio, estetoscopio o algún otro 'escopio' mediante, lo que nos pasaba a las personas cuando nos enfermábamos, y hacían lo posible por sanarnos. La ciencia proponía una pregunta, y eso era respetado. Proponía, era.

Hoy en día, la autopercepción, por subjetiva que sea, te cura de todo. Y, ya que está, por el mismo precio, te hace sentir como querés sentirte, ser quien quieras ser, como y 'no falta mucho' cuando quieras ser. Así, dentro de poco, con solo desearlo, un jubilado italiano podrá ser Brad Pitt o Angelina Jolie, o, por qué no, los dos juntos en un solo cuerpo, y en la década de 1940, o en las Cruzadas o en Ciudad Gótica.

Hoy en día tampoco hace falta comunicarse. Porque 'ya estamos comunicados'. Todo el tiempo. Para qué llamar entonces a alguien que virtualmente ya está aquí. Le mando un mensaje, y doy por sentado que lo recibió. Y si no, lo mismo da.

Debo reconocer mi condición de extranjero. Nativo y ciudadano del siglo XX. Por eso, permítanme terminar esta columna con un tanguito (que aún no tiene música, pero ya la tendrá) que me propuse componer al respecto, aunque más no fuera para dejar testimonio de mi extranjeritud (y sí, me adapto y yo también creo un neologismo) témporoespacial.

Yo soy del siglo pasado

Yo soy del siglo pasado / de Discépolo y Piazzolla
Del tiempo descamisado / Del flan y la pastafrola
Del amor en los zaguanes / Del cine de Woddy Allen
De los malos alemanes / Del picado en plena calle

Yo soy del siglo pasado / Del amor en rock y tango
Del que nunca ha visto un dólar / De la pizza a cinco mangos
De Perón, del Che, de Mao / De la compu de escritorio
Soy de Control versus Kaos / Del diván y el consultorio

Yo soy del siglo pasado / No me hablen con iniciales
Si no voy, es que no estoy / Yo no soy 'mis avatares'
Yo soy del siglo pasado / Con diecinueve en la fecha
no estaba todo mezclado / había izquierda y derecha

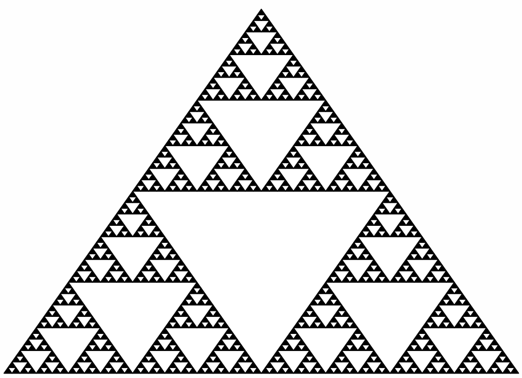
Yo soy del siglo pasado / Había códigos reales
Antes tenías amores / Ahora, vínculos virtuales
Yo soy del siglo pasado / Las cosas tecno me asustan
Antes decías 'te quiero' / Y ahora cliqueás 'me gusta'

Y en este mundo tan raudo / nos hacen sentir culpables
si no tomas los recaudos / pasás a ser descartable
¿De qué planeta venís? / Pregunta un pibe asombrado
Le contesté: Soy de aquí / Pero del siglo pasado

Rudy

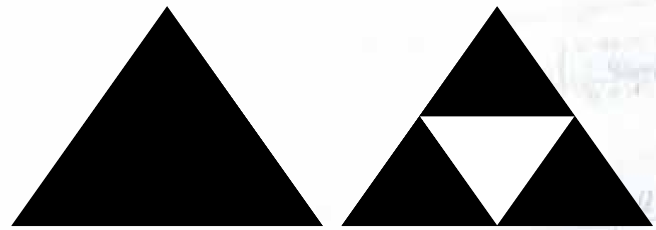
Hasta el infinito y más allá...

En el número anterior hablamos sobre la dimensión del triángulo de Sierpinski, que es un fractal autosemejante que se construye repitiendo infinitas veces una instrucción muy simple: se parte de un triángulo equilátero y se marcan los puntos medios de cada lado. Al unirlos se forma un triángulo central, el cual se elimina. Se repite el proceso en cada uno de los triángulos que quedan, y así hasta el infinito.



Vimos que su dimensión (en un sentido preciso) es un número comprendido entre 1 y 2. Veremos ahora qué relación tiene esto con la medida 'adecuada' para este tipo de objetos matemáticos. Para ello, supongamos que el triángulo de Sierpinski es un terreno que compramos, y que lo queremos cercar con alambre para que nadie entre. Es decir, queremos rodear al objeto 'final' obtenido después del proceso iterativo infinito. En matemática, 'llegar al infinito' se puede pensar como llegar tan lejos como uno quiera, y una forma posible de saber qué pasa luego de dar infinitos pasos es ir analizando qué ocurre en cada uno, encontrar un patrón (si lo hubiera), y deducir de ahí qué pasaría si damos infinitos de estos pasos.

Vayamos por pasos, entonces. Supongamos que la etapa inicial, digamos etapa 0, es un triángulo de perímetro L (en metros) y área A (en metros cuadrados), y que la etapa 1 corresponde a haber eliminado el primer triángulo central en el proceso de construcción. ¿Cuánto alambre necesito para cercar el resultado de la etapa 1? La cuenta es sencilla: en esta etapa hay 3 triángulos, cada uno de lado igual a la mitad del original (así que el perímetro de cada uno es $L/2$). Luego, la cantidad de alambre necesaria para cercar la etapa 1 es $3L/2$ (el triángulo central no pertenece a nuestro terreno, debemos cercarlo para que nadie entre).



Etapa 0 **Etapa 1**

Este comportamiento se repite en cada etapa: cada triángulo negro de la etapa anterior se reemplaza por 3 copias reducidas a la mitad. Así, los metros necesarios de alambre en cada etapa corresponden a 3/2 veces lo de la etapa anterior. Luego, en cada etapa multiplicamos por un número mayor que 1 lo obtenido en la etapa anterior, lo que hace que la cantidad tienda a infinito si lo hacemos infinitas veces.

¿Estaremos, entonces, rodeando mucho terreno? Si el área en la etapa 0 era A, en la siguiente tenemos 3 triángulos negros de área igual a $A/4$ (porque dividimos en 4 triángulos iguales y 'tiramos' uno). Entonces la superficie cercada en la etapa 1 es igual a $3A/4$. Nuevamente esto se repite en cada etapa: cada triángulo negro se reemplaza por 3 de área igual a $A/4$. Luego, en cada etapa el área cercada corresponde a las ¾ partes de la anterior. Esto significa multiplicar por un número menor que 1 una cantidad fija, infinitas veces, lo que hace que la cantidad disminuya en cada paso, hasta llegar a cero.

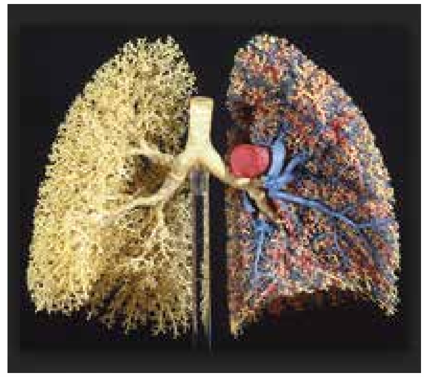
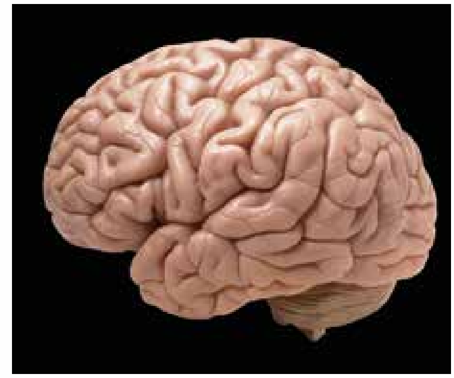
Entonces, si pudiéramos llegar al infinito y pensar en el triángulo de Sierpinski, ¡necesitaríamos infinitos metros de alambre para cercar un terreno con superficie nula! Esto dice, en cierta forma, que es un objeto muy grande para ser unidimensional, pero muy pequeño para ser bidimensional, como esperábamos.

Pregunta: ¿Cuánto alambre se necesita exactamente para cercar el terreno en la etapa n? ¿Qué área queda cercada en esa etapa?

La naturaleza tuvo la misma idea...

En el número anterior también mencionamos que los fractales, al igual que los rectángulos y los segmentos, son objetos puramente matemáticos. Sin embargo, la naturaleza los imita dentro de las escalas que puede, lo que resulta suficiente para beneficiarse de las propiedades de estos objetos. Por supuesto, estas propiedades no son tan extremas como en los fractales auténticos, pero se parecen y sirven.

Por ejemplo, el objeto matemático tiene longitud infinita y área nula, pero el objeto real será uno con longitud muy grande y área muy pequeña. Un ejemplo concreto de esto son las ramificaciones en el cuerpo humano, que logran maximizar longitud minimizando el espacio que ocupan (¡porque todo tiene que entrar en el cuerpo!). Este es el caso de los pulmones, el sistema nervioso y el circulatorio. En este

último, sin entrar en precisiones rigurosas, hay unos 30 niveles de ramificación que logran una longitud total mayor que dos veces la circunferencia de la Tierra.

Además, el algoritmo para construirlos es tan simple como efectivo: crece y bifúrcate. Esta misma instrucción es la que siguen las nervaduras en la hoja de una planta. Si pensamos en objetos de dimensión entre 2 y 3, encontramos fractales que tienen área infinita y volumen cero. En la naturaleza, que es menos exagerada, tenemos objetos con área muy grande y volumen muy chico. Por ejemplo, el cerebro y los intestinos tienen pliegues para incrementar superficie minimizando volumen.

¡Ave César!

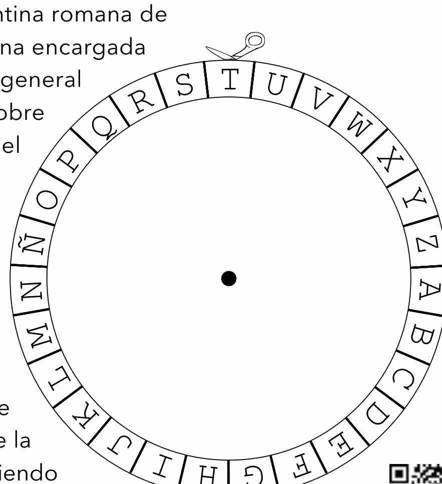
15 GH ODBR GH 2021

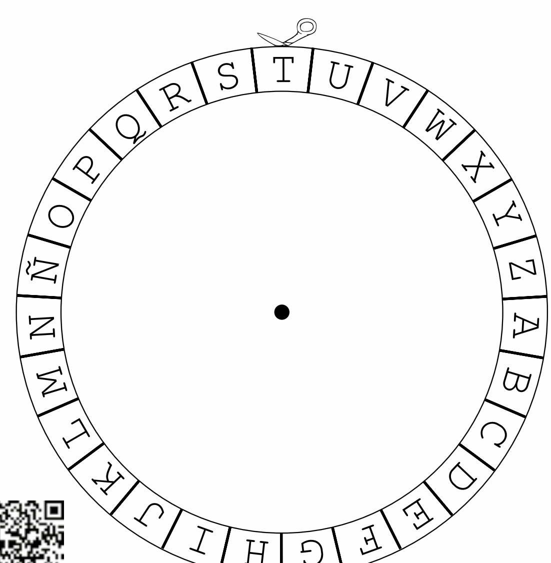
TXHULGD DGD,
PR WH RÑYLGHV GH FROSUDU ÑD FLHPFLD KRB. ÑD SURALOD YLHPH HPFULSWDGD.
FRP DORU, PLQLWD.

Imaginémonos en una cantina romana de hace dos mil años. Una persona encargada de llevar un mensaje de un general a otro se queda dormida sobre la mesa y ahí, aprovechando el descuido, un espía le roba el contenido de su morral.

O no, imaginémonos que, como en una película de espías más actual, una persona se sube con su computadora a un poste en la calle y la enchufa a los cables de internet, y así mira todo lo que la gente de la cuadra está haciendo por internet.

En ambos casos, el espía se encuentra con una carta, o con un e-mail, como el que está arriba. La carta *está encriptada*.



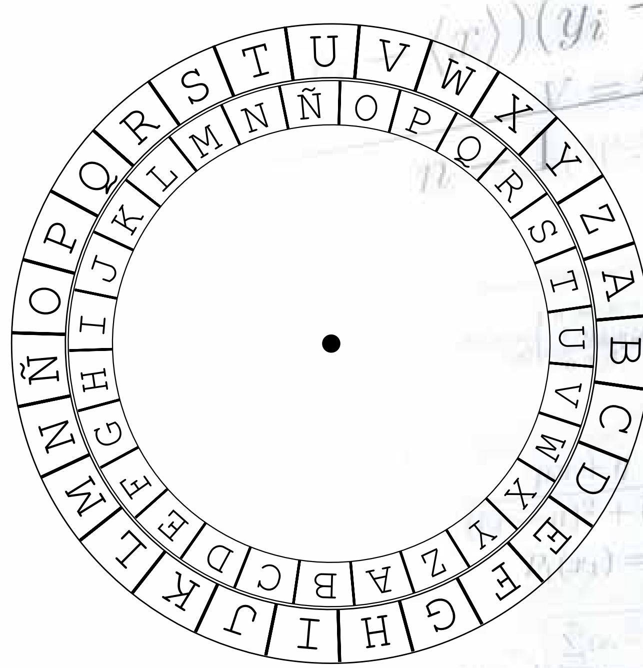


Usa este QR para bajar la imagen y poder imprimirla.

¡Ja! Lo logramos: logramos que el espía no conozca nuestra información. Ahora vamos a ver cómo haría quien recibe el mensaje para *desencriptarlo*.

Les invitamos a un viaje a la nostalgia, a esas revistas que nos ofrecían diversas figuras para recortar y armar. ¡Anímense a recortar, nomás! Y vamos a construir nuestro *dispositivo desencriptador*. Se deben recortar los dos círculos de la figura solo por fuera de ellos, y armarlos centrándolos con un ganchito mariposa, *pin* o alfiler de la forma que indica la figura a la derecha.

Así, ambos círculos podrán girar libremente con el más chico por encima del más grande. Y, ahora, con nuestro dispositivo desencriptador, les invitamos a descifrar el mensaje oculto. Hay que alinear *de la forma correcta* un círculo con otro, y eso nos dirá *qué letra del mensaje (que buscamos en el círculo externo) debe transformarse en cuál otra (que es la que aparece en el círculo interno)*. Solo hay que averiguar *cuánto* debe desfasarse una de la otra…



Corolario

Para que cosas como nuestras contraseñas o nuestros mails y datos privados puedan ir y volver por los cables de internet (y por wifi) sin que nadie que los intercepte pueda entenderlos (aun con una compu enchufada a la red), es necesario *encriptar* todo lo que viaje por la red. Y para eso podemos usar un *mecanismo de encriptación* como el del César, que es como se llama esta forma de encriptar que hoy vimos. Sin embargo, este sistema de encriptación puede ser quebrado fácilmente con la tecnología actual. Por ello, en la actualidad se usan sistemas con la misma idea (una herramienta que nos dice qué se transforma en qué), pero con mecanismos más complejos que nuestros círculos, lo cual las hace más seguras ¡y son prácticamente indescifrables!.

Más información: *https://es.wikipedia.org/wiki/Cifrado_César*

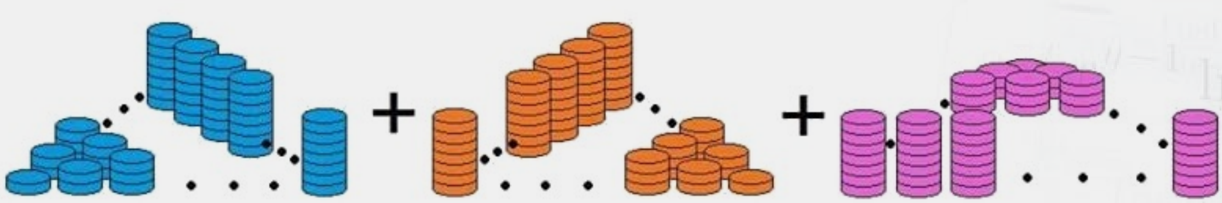
¿Cuál es tu código favorito para encriptar texto?

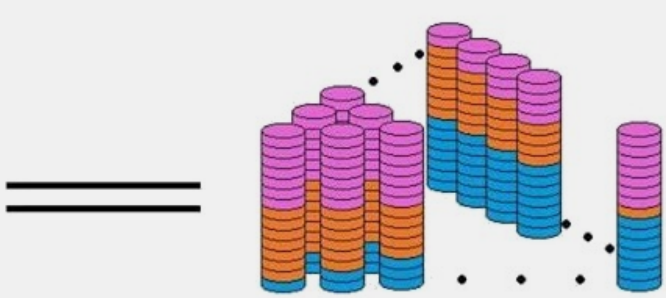
Si querés podés mandarnos tu mensaje encriptado a *contacto@cienciahoy.org.ar*

Soluciones

'Sumar bien'

Así como en el problema de Gauss, según la figura que dimos es más natural calcular el doble de 1 + 2 + 3 +… + n, en este caso resulta natural calcular el triple de $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. En efecto:





Esta última 'porción de torta' tiene un total de 2n + 1 capas, cada una de la cual tiene (¡gracias a Gauss!) n* (n + 1) / 2 confites. Lo cual nos permite concluir que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{2} * (2n + 1) * n * (n + 1)$$

Respuesta a la pregunta de 'Hasta el infinito y más allá'

En la etapa n necesitamos $(3/2)^n\ L$ metros de alambre para cercar una superficie de $(3/4)^n\ A$ metros cuadrados.

'Ave César'

Dos pistas, GH = DE en la fecha y ODBR = MAYO (único mes de cuatro letras).

15 DE MAYO DE 2021
QUERIDA ADA,
NO TE OLVIDES DE COMPRAR LA CIENCIA HOY. LA PROXIMA VIENE ENCRIPTADA.
CON AMOR, NIÑITA.

Equipo de la sección 'Matemática, ilusiones y humor'

Marilina Carena
Matemática, UNL-Conicet.
marilcarena@gmail.com

Matías López-Rosenfeld
Computador, UBA-Conicet
mlopez@dc.uba.ar

Rudy
Humorista.
marcelorudy10@gmail.com

Nicolás Fernández Larrosa
Biólogo, IFIBYNE, UBA-Conicet.
fernandezlarrosanicolas@gmail.com

Juan Pablo Pinasco
Matemático, UBA-Conicet.
jpinasco@gmail.com

Alfredo Sanzo
Ingeniero, ICC, UBA-Conicet.
alfredo.sanzo@gmail.com

Pablo Groisman
Matemático, UBA-Conicet.
pgroisma@dm.uba.ar

Nicolás Pírez (coordinador)
Neurobiólogo, IFIBYNE, UBA-Conicet.
npirez@gmail.com

Nicolás Sirolli
Matemático, UBA-Conicet.
nsirolli@dm.uba.ar

Preguntas, comentarios y sugerencias: ***contacto@cienciahoy.org.ar***

HUMOR

El carau (*Aramus guarauna*) y el caracolero (*Rostrhamus sociabilis*) se alimentan principalmente de caracoles de agua dulce del género Pomacea. Una larga historia evolutiva cuenta cómo el miembro anterior de las aves pasó de ser una hermosa patita de cinco dedos a un ala emplumada.

Irene Negri
irenitanegrix@gmail.com